

Examen de Théorie des Graphes

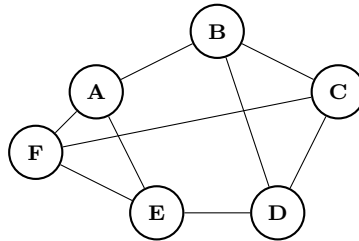
Vayssade Jehan-Antoine

03 avril 2026

Durée : 1 heures 30 **Note maximal : 20 points**
Matériel autorisé : aucun document, calculatrice interdite.

1 Graphes et propriétés de base (5 points)

Soit le graphe non orienté $G = (V, E)$ suivant :



1. Déterminer le degré de chaque sommet. (0.5 pt)
2. Le graphe est-il connexe ? (0,5 pt)
3. Le graphe est-il biparti ? Si oui, donner une bipartition. (0.5 pt)
4. Donner la matrice d'adjacence de G . (1 pt)
5. Donner la matrice d'incidence sommet arcs de G . (1 pt)
6. Donner la liste d'adjacence de G . (1 pt)
7. Donner le nombre et les chemins de longueur 2 entre A et D . (0,5 pt)

2 Reconstruction d'un graphe (4 points)

Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ l'ensemble des sommets d'un graphe orienté $G = (X, U)$.
On donne les ensembles des prédécesseurs suivants :

$$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_1, x_3\}$$

$$\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1, x_4\}$$

$$\Gamma^{-1}(x_3) = \{x_3, x_4, x_5\}$$

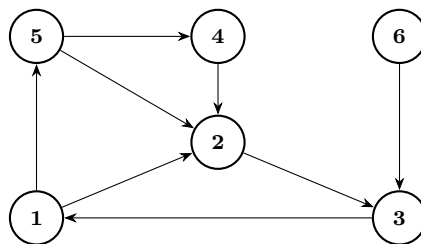
$$\Gamma^{-1}(x_4) = \{x_2, x_1\}$$

$$\Gamma^{-1}(x_5) = \{x_3, x_5\}$$

1. Reconstruire le graphe a partir de l'application multivoque Γ^{-1} (0.5 pt).
2. Déterminer les ensembles $W^+(x_i)$ et $W^-(x_i)$. (1 pts)
3. Déduisez les demi-degrés extérieurs et intérieurs via W^+ et W^- (0,5 pts)
4. En déduire la matrice d'adjacence A du graphe (1.0 pts)
5. Construire la matrice diagonale des demi-degrés (0,5 pt)
6. Calculer la matrice laplacienne du graphe (0.5 pt)

3 Parcours et détection de cycles (4 points)

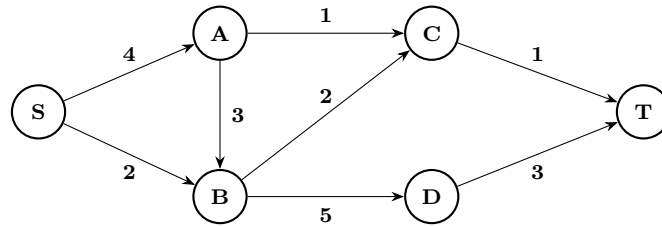
On considère le graphe orienté ci-dessous :



1. Effectuer un parcours en profondeur (DFS) en partant du sommet 1 (2 pt)
Il existe plusieurs façon effectuer DFS, une version simple et rapide vue en soutient permettant de répondre a cette question. Et une version vue en CM et TD utilisant les couleurs (blanc, gris, noire), cette dernières permet de répondre aux questions suivantes.
2. Caractériser les arcs du graphes (arbre, arrière, avant, transversale) (1 pts)
3. Le graphe contient-il un cycle? Si oui, en donner un exemple. (0.5 pt)
Justifier avec un type d'arc
4. Donner l'ordre de découverte et de finition des sommets (0.5 pts)
5. Écrivez une version simple de l'algorithme DFS en python (bonus +2 pts)

4 Algorithmes de plus court chemin (4 points)

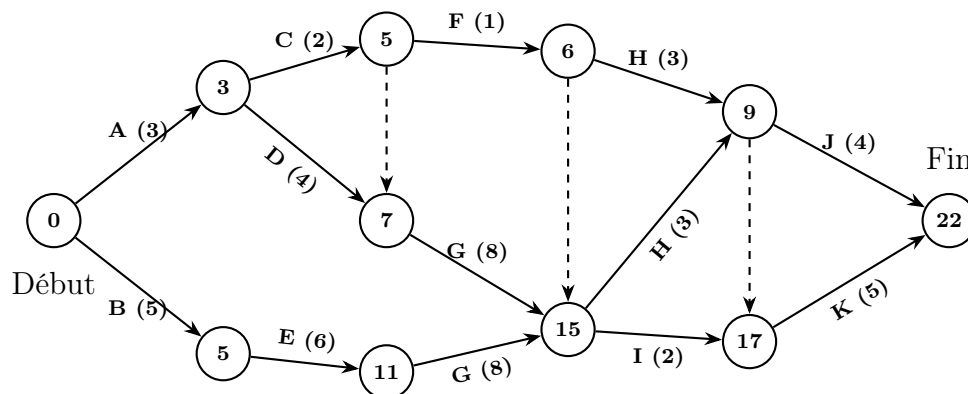
On considère le graphe pondéré orienté suivant (les poids sont indiqués sur les arcs) :



1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra depuis S .
2. Donner la table des distances et des prédécesseurs à chaque étape. (3.5 pts)
3. Quel est le plus court chemin de S à T ? Quelle est sa longueur? (0.5 pt)

5 Méthode PERT/CPM (3 points)

On vous donne ci-dessous le graphe PERT du projet (déjà construit avec les durées) :



Sur ce graphe déjà construit :

1. Vérifier les dates au plutôt (chiffre dans les noeuds) et les arcs (0.5 pt)
2. Effectuer le calcul des dates au plus tard (1 pts)
3. Calculer les marges (0.5 pt)
4. Identifier le(s) chemin(s) critique(s) (0.5 pt)
5. Calculer la durée totale minimale du projet (0.5 pt)

6 Expressions régulières (2 points)

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On considère l'expression régulière suivante : $r = a^*ba^*$ Cette expression reconnaît tous les mots qui contiennent **exactement un** symbole b , précédé de zéro ou plusieurs a , et suivi de zéro ou plusieurs a . Autrement dit, il s'agit des mots de la forme a^kba^m où $k, m \geq 0$.

1. Expliquer brièvement comment les **expressions régulières** ou des machine a états peuvent être modélisées par des graphes. Appuyez sur la notion de processus et d'états (début, fin, transitoire). (1 pts)
2. Dessiner le graphe correspondant à l'expression régulière proposé. (1 pts)
Indiquez, l'état initial (flèche entrante), les états acceptants (ou non) et les transitions étiquetées par a ou b .

7 Diffusion discrète analyse critique (3 points)

Considérons un graphe non orienté $G = (V, E)$ de matrice laplacienne L . On étudie l'équation de diffusion discrète ci-dessous dont $f(t) \in \mathbb{R}^{|V|}$. Qui est un vecteur dont chaque composante représente une valeur associée à un sommet.

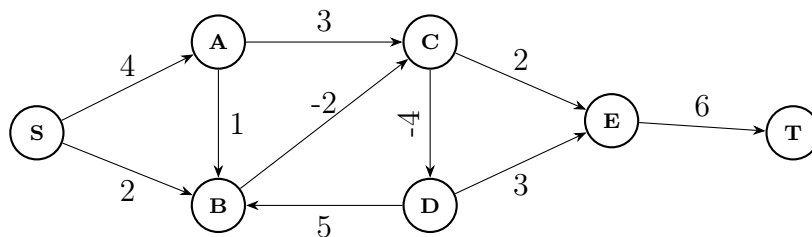
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t) = -Lf(t)$$

1. Quelle interprétation peut-on donner à L et l'évolution temporelle de $f(t)$? (3 pts)
2. Analysez la formule suivante qui fait intervenir des notions de propriétés spectrales et de fermeture transitives. Expliquez ce qu'elle semble proposer, solutionner et pourquoi son utilisation dans le cadre de l'équation de diffusion apparaît problématique. (x pts)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t) = L(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})f(t) + f(0)$$

8 Algorithme de Bellman-Ford et cycle absorbant (5 points)

On considère le graphe orienté pondéré suivant :



1. Appliquer l'algorithme de Bellman-Ford à partir du sommet source S . Réalisez les premières itérations et indiquez l'évolution des distances les plus courtes $d(v)$ pour chaque sommet à chaque itération. (3 pts)
2. Effectuez une itération supplémentaire. Que constate-t-on? Concluez sur l'existence ou non d'un cycle absorbant (cycle de poids négatif) accessible depuis S (1 pts)
3. Expliquez pourquoi, en présence d'un cycle absorbant, l'algorithme de Bellman-Ford ne permet pas de calculer des plus courts chemins valides. Et proposer une pseudo-solution (1 pt)